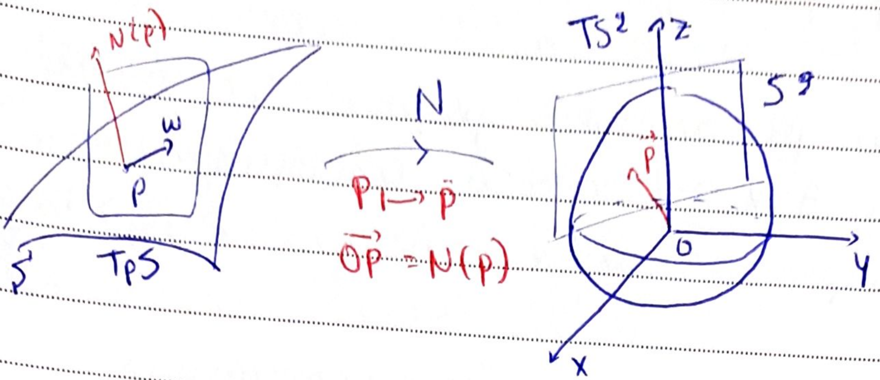
Απεικόνιση Gauß

26/11/2018
15ο μάθημα



Απεικόνιση Weingarden

$L_p = -dN_p$

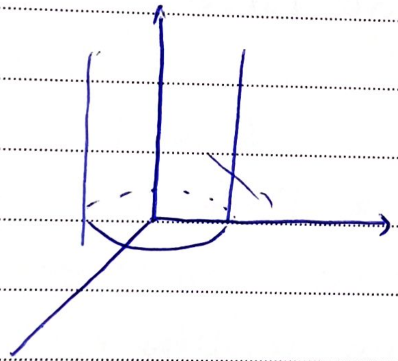
$L_p : T_pS \to T_pS$

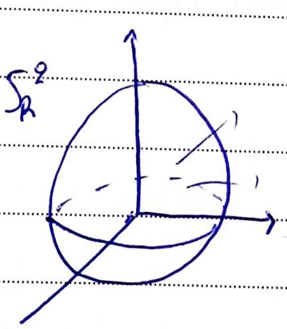
1) <u>Επίπεδο</u>: (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, $N(p)=\dfrac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$, $\boxed{L_p=0}$

2) <u>Κύλινδρος</u>: C_r: $x^2+y^2=r^2$, $N: C_r \to S^2$ $N(x,y,z)=\frac{1}{r}(x,y,0)$

$p\in C_r$, $L_p: T_pC_r \to T_pS$, $\boxed{L_pw=\frac{1}{r}(w_1,w_2,0)}$ $w=(w_1,w_2,w_3)\in T_pS$

3)





$S_R^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$ $R>0$

Απεικόνιση Gauß $N: S_R^2\to S^2$

$N(x,y,z)=-\frac{1}{R}(x,y,z)$

$p=(x_0,y_0,z_0)\in S_R^2$, $w=(w_1,w_2,w_3)\in T_pS_R^2$ $N\circ c(t)=N(c(t))$

$L_pw=-dN_p(w)=-(N\circ c)'(0)$ $=N(x(t),y(t),z(t))=-\frac{1}{R}(x(t),y(t),z(t))$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Θεωρώ } c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S_R^2 \quad c(0)=p,\quad c'(0)=w\\ c(t)=(x(t),y(t),z(t))\\ c'(0)=w \Leftrightarrow (x'(0),y'(0),z'(0))=(w_1,w_2,w_3)\end{array}}$

$\Leftrightarrow L_pw=-(N\circ c)'(0)$

$=\frac{1}{R}(x'(0),y'(0),z'(0))$

$L_pw=\frac{1}{R}w$

$\boxed{L_p=\frac{1}{R}Id}$

Γραμμική Άλγεβρα

Αυτοπροσαρτημένος

~~Αυτοπροσαρτημένος~~ γραμ. μετασχηματισμός

Έστω V $\mathbb{R}$ δ.χ. εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

Ένας γραμ. μετασχηματισμός $A: V \to V$ καλείται αυτοπροσαρτημένος ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \rangle$, αν-ν $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \ \forall x, y \in V$

Έστω $A: V \to V$ είναι αυτοπροσαρτημένος γραμ. μετασχηματισμός. Ορίζω την $B_A : V \times V \to \mathbb{R}$ $B_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle$

B_A διγραμμική Επιπλέον, $B_A(x, y) = B_A(y, x)$

Αν A είναι αυτοπροσαρτημένος γρ. μετασχηματισμός η B_A είναι συμμετρική διγραμμική μορφή με αντίστοιχη τετραγωνική μορφή $Q_A : V \to \mathbb{R}$, $Q_A(x) = B_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle$

$$B_A(x, y) = \frac{1}{x}\left\{ Q_A(x, y) - Q_A(x) - Q_A(y) \right\}$$

Η Q_A καλείται θετική (αρνητική) ημιορισμένη
$\iff Q_A(x) \geq 0 \ \forall x \in V$ $\quad (Q_A(x) \leq 0 \ \forall x \in V)$

Η Q_A καλείται θετική (αρνητική) ορισμένη και ισχύει
$Q_A(x) = 0 \iff x = 0$

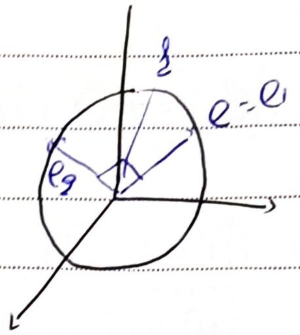
Λήμμα

Έστω V $\mathbb{R}$ δ.χ. με $\dim V = 2$ εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ και $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμ. μετασχηματισμός

$\max = \{ Q_A(w) \mid \|w\| = 1 \} = Q_A(e)$

$\|e\| = 1$ Τότε $Q_A(e)$ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το e

Απόδειξη



Θεωρώ ορθοκανονική βάση $\{e_1 = e, e_2\}$

$\|w\| = 1$, $w = \cos t e_1 + \sin t e_2$, $t \in \mathbb{R}$

Η $Q_A(\cos t e_1 + \sin t e_2) = f(t)$ έχει ολικό μέγιστο στο $t_0 = 0$

Από Θεώρημα Fermat $f'(0) = 0$

$$f(t) = Q_A(\cos t e_1 + \sin t e_2) = \langle A(\cos t e_1 + \sin t e_2), \cos t e_1 + \sin t e_2 \rangle$$

$$= \langle \cos t Ae_1 + \sin t Ae_2, \cos t e_1 + \sin t e_2 \rangle$$

$$= \langle Ae_1, e_1 \rangle \cos^2 t + \langle Ae_1, e_2 \rangle \cos t \sin t$$

$$+ \langle Ae_2, e_1 \rangle \cos t \sin t + \langle Ae_2, e_2 \rangle \sin^2 t$$

$$\Rightarrow f(t) = \langle Ae_1, e_1 \rangle \cos^2 t + \langle Ae_1, e_2 \rangle \sin 2t + \langle Ae_2, e_2 \rangle \sin^2 t$$

$$0 = f'(0) = 2 \langle Ae_1, e_2 \rangle \Rightarrow \boxed{\langle Ae_1, e_2 \rangle = 0}$$

$$Ae_0 = Ae_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle e_1 + \cancel{\langle A e_1, e_2 \rangle e_2} = Q_A(e) e$$

Θεώρημα

Έστω V $\mathbb{R}$.δ.χ. με $\dim V = 2$ εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ και $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμμ. μετασχηματισμός. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2\}$ του V τέτοια ώστε

i) $\boxed{Ae_1 = \lambda_1 e_1}$ $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

ii) $\lambda_1 = \max\{Q_A(w) \mid \|w\| = 1\}$

$\lambda_2 = \min\{Q_A(w) \mid \|w\| = 1\}$

Απόδειξη

Θεωρώ τη βάση $\{e_1 = e, e_2\}$ ορθ. με $\max\{Q_A(w) \mid \|w\| = 1\} = Q_A(e)\}$

$A e_2 = \langle A e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle A e_2, e_2 \rangle e_2 = \langle e_2, A e_1 \rangle e_1 + Q_A(e_2) e_2$

$\langle e_2, \lambda e_1 \rangle$

$\Rightarrow A e_2 = Q_A(e_2) e_2$

$\|w\| = 1$

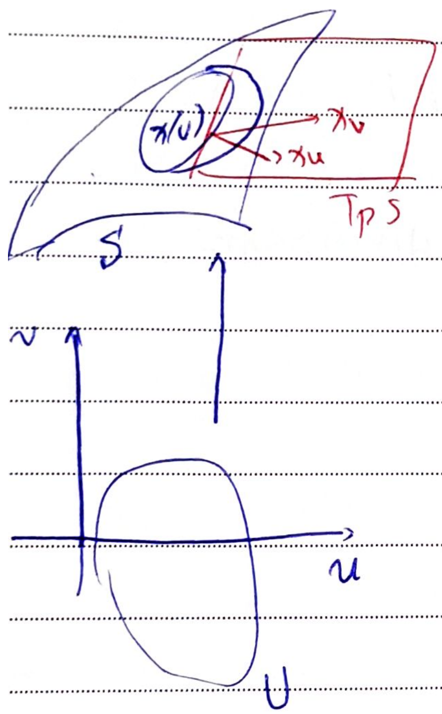
$w = x e_1 + y e_2$

$Q_A(w) = Q_A(x e_1 + y e_2) = \langle A(x e_1 + y e_2), x e_1 + y e_2 \rangle =$

$= \langle A e_1, e_1 \rangle x^2 + 2 \langle A e_1, e_2 \rangle xy + \langle A e_2, e_2 \rangle y^2$

$= Q_A(e_1) x^2 + Q_A(e_2) y^2$

$\geq Q_A(e_1) x^2 + Q_A(e_2) y^2 = Q_A(e_2)(x^2 + y^2) = Q_A(e_2)$



$P = X(u,v)$, $\{X_u, X_v\}$ βαση του T_pS

$L_p = -dN_p : T_pS \to T_pS$

$L_p X_u = -dN_p(X_u) = -(N \circ X)_u$

$L_p X_v = -dN_p(X_v) = -(N \circ X)_v$

Σύμβαση : $L X_u = -N_u = -(N \circ X)_u$

$L X_v = -N_v = -(N \circ X)_v$

Πρόταση

Για κάθε $p \in S$ η απεικόνιση Weingarden $L_p : T_pS \to T_pS$ είναι αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός ως προς $\langle , \rangle_p$

Απόδειξη

$\langle L_p w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, L_p w_2 \rangle \quad \forall w_1, w_2 \in T_pS$

$\Leftrightarrow \langle L_p X_u, X_u \rangle = \langle X_u, L X_u \rangle, \quad \langle L X_v, X_v \rangle = X_v, L_p X_v \rangle$

και $\quad \langle L_p X_u, X_v \rangle = \langle X_u, L_p X_v \rangle$

$\langle L X_u, X_v \rangle = -\langle N_u, N_v \rangle = -(\langle N, X_v \rangle X_u + \langle N, X_{vu} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle$

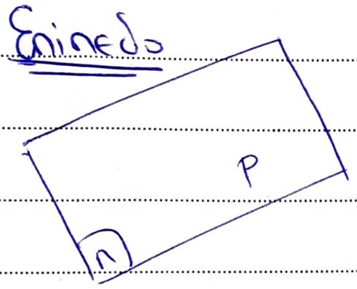
$\langle X_u, L X_v\rangle = -\langle X_u, N_v\rangle = -\langle (X_v, N\rangle)_u + \langle X_{uv}, N\rangle = \langle N, X_{uv}\rangle$

Ορίζω την συμμετρική διγραμμική μορφή
$B_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$, $B_p(w_1, w_2) = \langle L_p w_1, w_2\rangle_p$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΜΟΡΦΗ

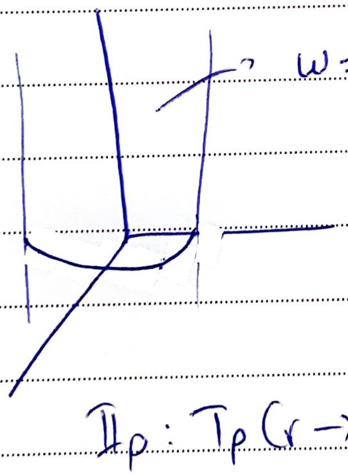
Ορισμός : Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια. Καλούμε δεύτερη θεμελιώδη μορφή της S στο P την τετραγωνική μορφή $\mathrm{II}_p : T_pS^2 \to \mathbb{R}$
$\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle_p \quad w \in T_pS$
$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w\rangle_p$

1) Επίπεδο



$L_p = 0 \quad \mathrm{II}_p : T_p\Pi \to \mathbb{R} \quad \mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle$
$\mathrm{II}_p = 0 \quad \forall p \in \Pi$

2) Κύλινδρος $C_r : x^2 + y^2 = r^2$

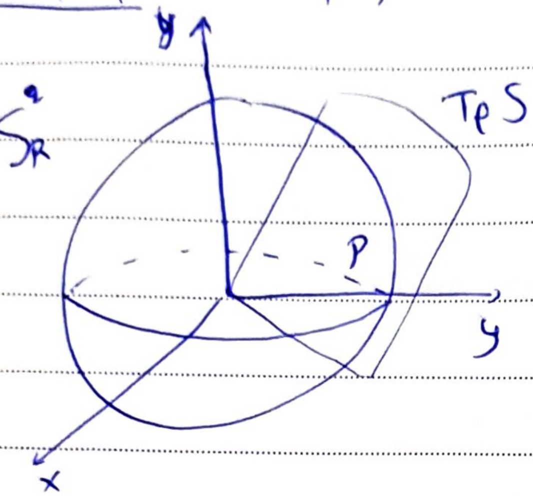


$w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r$
$N : C_r \to S^2$
$N(x,y,z) = -\frac{1}{r}(x,y,z)$
$L_p(w) = L_p(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{r}(w_1, w_2, w_3)$

$\mathrm{II}_p : T_p C_r \to \mathbb{R}$, $\mathrm{II}_p(w) = \langle L_p w, w\rangle_p$

$\mathrm{II}_p(w) = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2)$

3) <u>Σφαίρα</u> : S^2_R , $N: S^2_R \to S^2$



$$N(x,y,z) = -\frac{1}{R}(x,y,z)$$

$$L_p : T_p S^2_R \to T_p S^2_R$$

$$L_p w = \frac{1}{R} w$$